## ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

### 1 Теоретическое введение

**Задача о размещении** **(транспортная задача)**– это РЗ, в которой работы и ресурсы измеряются в одних и тех же единицах. В таких задачах ресурсы могут быть разделены между работами, и отдельные работы могут быть выполнены с помощью различных комбинаций ресурсов. Примером типичной транспортной задачи (ТЗ) является распределение (транспортировка) продукции, находящейся на складах, по предприятиям-потребителям.

Стандартная ТЗ определяется как задача разработки наиболее экономичного плана перевозки продукции*одного вида* из нескольких пунктов отправления в пункты назначения. При этом величина транспортных расходов прямо пропорциональна объему перевозимой продукции и задается с помощью тарифов на перевозку *единицы продукции*.

*Исходные параметры модели ТЗ*

1. n – количество пунктов отправления, m – количество пунктов назначения.
2. – запас продукции в пункте отправления () [ед. прод.].
3. – спрос на продукцию в пункте назначения () [ед. прод.].
4. – тариф (стоимость) перевозки единицы продукции из пункта отправления в пункт назначения [руб./ед. прод.].

*Искомые параметры модели ТЗ*

1. – количество продукции, перевозимой из пункта отправления в пункт назначения [ед. прод.].
2. – транспортные расходы на перевозку всей продукции [руб.].

*Этапы построения модели*

1. Определение переменных.
2. Проверка сбалансированности задачи.
3. Построение сбалансированной транспортной матрицы.
4. Задание ЦФ.
5. Задание ограничений.

*Транспортная модель*

|  |  |
| --- | --- |
| ; | (1) |

ЦФ представляет собой общие транспортные расходы на осуществление всех перевозок в целом. Первая группа ограничений указывает, что запас продукции в любом пункте отправления должен быть равен суммарному объему перевозок продукции из этого пункта. Вторая группа ограничений указывает, что суммарные перевозки продукции в некоторый пункт потребления должны полностью удовлетворить спрос на продукцию в этом пункте. Наглядной формой представления модели ТЗ является транспортная матрица (табл. 1).

Таблица 1

Общий вид транспортной матрицы

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Пункты  отправления, | Пункты потребления, | | | | Запасы,  ед. прод. |
|  |  | … |  |
|  | , [руб./ед. прод.] |  | … |  |  |
|  |  |  | … |  |  |
| … | … | … | … | … | … |
|  |  |  | … |  |  |
| Потребность  ед. прод. |  |  | … |  |  |

Из модели (1) следует, что сумма запасов продукции во всех пунктах отправления должна равняться суммарной потребности во всех пунктах потребления, т.е.

|  |  |
| --- | --- |
| . | (2) |

Если (2) выполняется, то ТЗ называется **сбалансированной** (закрытой), в противном случае – **несбалансированной** (открытой). В случае, когда *суммарные запасы превышают суммарные потребности*, необходим дополнительный **фиктивный** (реально не существующий) пункт потребления, который будет формально потреблять существующий излишек запасов, т.е.

.

Если *суммарные потребности превышают суммарные запасы*, то необходим дополнительный **фиктивный** пункт отправления, формально восполняющий существующий недостаток продукции в пунктах отправления:

.

Для фиктивных перевозок вводятся **фиктивные** тарифы , величина которых обычно приравнивается к нулю . Но в некоторых ситуациях величину фиктивного тарифа можно интерпретировать как **штраф**, которым облагается каждая единица недопоставленной продукции. В этом случае величина может быть любым положительным числом.

**Задача о назначениях** – частный случай ТЗ. В задаче о назначениях количество пунктов отправления равно количеству пунктов назначения. Объемы потребности и предложения в каждом из пунктов назначения и отправления равны 1. Примером типичной задачи о назначениях является распределение работников по различным видам работ, минимизирующее суммарное время выполнения работ.

Переменные задачи о назначениях определяются следующим образом

### 2 Методические рекомендации

#### 2.1 Стандартная транспортная задача

***Задача №1***

Заводы некоторой автомобильной фирмы расположены в городах А, В и С. Основные центры распределения продукции сосредоточены в городах D и E. Объемы производства указанных трех заводов равняются 1000, 1300 и 1200 автомобилей ежеквартально. Величины квартального спроса в центрах распределения составляют 2300 и 1400 автомобилей соответственно. Стоимости перевозки автомобилей по железной дороге по каждому из возможных маршрутов приведены в табл.2.

Таблица 2

***Стоимость перевозки автомобилей, руб./шт.***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | D | E |
| А | 80 | 215 |
| В | 100 | 108 |
| С | 102 | 68 |

Постройте математическую модель, позволяющую определить количество автомобилей, перевозимых из каждого завода в каждый центр распределения, таким образом, чтобы общие транспортные расходы были минимальны.

***Решение***

*Определение переменных*

Обозначим количество автомобилей, перевозимых из i-го завода в j-й пункт потребления через .

*Проверка сбалансированности задачи*

Проверим равенство суммарного производства автомобилей и суммарного спроса

откуда следует вывод – задача *несбалансирована*, поскольку спрос на автомобили превышает объем их производства. Для установления баланса введем дополнительный *фиктивный* завод с ежеквартальным объемом производства 200 шт. (). Фиктивные тарифы приравняем к нулю (т.к. перевозки в действительности производиться не будут).

*Построение транспортной матрицы*

Согласно результатам проверки сбалансированности задачи №1 в транспортной матрице должно быть четыре строки, соответствующих заводам и два столбца, соответствующих центрам распределения (см. табл.3). Тариф перевозки обычно вписывают ***в правом нижнем*** углу клетки матрицы для удобства дальнейшего нахождения опорных планов задачи.

Таблица 3

***Транспортная матрица задачи №1***

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | D | | E | | Объем произв., шт./квартал |
| А |  |  |  |  | 1000 |
|  | 80 |  | 215 |
| B |  |  |  |  | 1300 |
|  | 100 |  | 108 |
| C |  |  |  |  | 1200 |
|  | 102 |  | 68 |
| Фиктивный завод |  |  |  |  | 200 |
|  | 0 |  | 0 |
| Спрос, шт./квартал | 2300 | | 1400 | | *3700* |

*Задание ЦФ*

Суммарные затраты в рублях на ежеквартальную перевозку автомобилей определяются по формуле

*Задание ограничений*

[шт./квартал]

#### 2.2 Модификации стандартной транспортной задачи

Недопустимые перевозки

Иногда в определенных направлениях перевозки продукции невозможны, например, по причине ремонта транспортных магистралей. Такие ситуации моделируются с помощью введения так называемых **запрещающих** тарифов . Запрещающие тарифы должны сделать невыгодными перевозки в соответствующих направлениях. Для этого величина запрещающих тарифов должна быть больше реальных тарифов в транспортной матрице

.

*Максимизация ЦФ*

Существующий алгоритм решения транспортных задач (**метод потенциалов**) предполагает, что ЦФ стремится к минимуму. Однако существуют ситуации, когда в рамках транспортной модели требуется максимизировать ЦФ, например, общий доход, объем продаж, прибыль, качество выполняемых работ и т.д. В этом случае в модель вместо искомой ЦФ вводится ЦФ , в которой тарифы умножаются на (-1). Таким образом, максимизация будет соответствовать минимизации .

Многопродуктовые модели

Если в задаче идет речь о том, что из каждого пункта отправления можно перевозить продукцию нескольких видов, то при построении модели можно использовать один из следующих вариантов:

* каждому виду продукции должна соответствовать одна транспортная матрица;
* все виды продукции представлены в одной общей матрице с использованием запрещающих тарифов в клетках, связывающих разные виды продукции.

### 3 Варианты задач для самостоятельного решения

##### Задача №1

Постройте транспортную модель для исходных данных задачи №1 при условии, что квартальный спрос в пункте распределения D упал до 1900 автомобилей, а выпуск на заводе B увеличился до 1500 автомобилей за квартал.

##### Задача №2

Постройте математическую модель задачи №1 при условии, что за каждый недопоставленный автомобиль в распределительные центры D и E введены штрафы 200 и 300 руб. соответственно. Кроме того, поставки с завода А в распределительный центр E не планируются изначально.

##### Задача №3

Три электрогенерирующие станции мощностью 25, 40 и 30 миллионов кВтч поставляют электроэнергию в три города. Максимальная потребность в электроэнергии этих городов оценивается в 30, 35 и 24 миллионов кВтч. Цены за миллион кВтч в данных городах приведены в табл.4.

Таблица 4

***Стоимость за электроэнергию, руб./млн.кВтч***

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | Города | | |
|  |  | *1* | *2* | *3* |
| Станция | *1* | 600 | 700 | 400 |
| *2* | 320 | 300 | 350 |
| *3* | 500 | 480 | 450 |

В августе на 20% возрастает потребность в электроэнергии в каждом из трех городов. Недостаток электроэнергии могут восполнить из другой электросети по цене 1000 за 1 миллион кВтч. Но третий город не может подключиться к альтернативной электросети. Электрогенерирующие станции планируют разработать наиболее экономичный план распределения электроэнергии и восполнения ее недостатка в августе. Сформулируйте эту задачу в виде транспортной модели.

##### Задача №4

Некоторой компании принадлежат три фермы, где выращивают овощи, предназначенные для последующей обработки на двух холодильных заводах компании. Одним из выращиваемых овощей являются бобы, которые холодильные заводы продают по 200 руб. за 1 т. В табл. 5 приведены издержки производства для каждой фермы и каждого холодильного завода, максимальные значения урожая для каждой фермы, прогнозные значения спроса на следующий сезон для каждого завода. В табл.6 приведена стоимость транспортировки бобов.

Таблица 5

***Издержки производства и максимальный урожай бобов***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | | Издержки производства, руб./т | Максимальный урожай, т |
| Фермы | *1* | 90 | 2000 |
| *2* | 95 | 3000 |
| *3* | 87 | 1500 |
|  |  |  | Прогнозный спрос, т |
| Заводы | *1* | 20 | 2750 |
| *2* | 23 | 3250 |

Таблица 6

***Стоимость транспортировки бобов, руб./т***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Фермы | Холодильный завод | |
| *1* | *2* |
| *1* | 10 | 15 |
| *2* | 12 | 12 |
| *3* | 18 | 9 |

Постройте транспортную модель, которая для ферм и холодильных заводов позволяет найти на следующий сезон производственный план, гарантирующий максимальный доход.

##### Задача №5\*

***(многопродуктовая модель с независимыми продуктами)***

Некоторая фирма производит автомобили четырех различных марок , , , . Завод в городе A производит только автомобили марок , , в городе B – только автомобили марок , , , а в городе C – только автомобили марок , . Ежеквартальные объемы выпуска каждого завода и величины спроса в каждом пункте распределения приведены в табл.7. Постройте соответствующую модель экономичных перевозок. Тарифы перевозок соответствуют задаче №1.

Таблица 7

***Объемы производства заводов и спроса пунктов распределения автомоби***лей, шт./квартал

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Марка автомобиля | | | |
|  |  |  |  |
| Заводы | | | | |
| А | – | – | 700 | 300 |
| B | 500 | 600 | – | 400 |
| C | 800 | 400 | – | – |
| Пункты распределения | | | | |
| D | 700 | 500 | 500 | 600 |
| E | 600 | 500 | 200 | 100 |

***Рекомендация.***Пункты отправления в транспортной матрице необходимо вводить в соответствии с марками автомобилей, выпускаемыми каждым заводом, а пункты назначения – в соответствии с марками автомобилей, требуемыми в каждом пункте распределения.

##### Задача №6\*

***(многопродуктовая модель с зависимыми продуктами)***

Исходное условие задачи №5 при условии, что некоторую часть спроса на одну из марок можно удовлетворять за счет другой в соответствии с табл.8. Постройте соответствующую модель экономичных перевозок.

Таблица 8

##### Данные о заменяемых марках автомобилей

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Центр распределения | Заменяемая часть спроса в % | Взаимозаменяемые марки |
| D | 10 | , |
| 20 | , |
| E | 10 | , |
| 5 | , |

***Рекомендация.***Введите четыре новых пункта назначения, соответствующих комбинациям (), (), () и () (см. табл. 8). Величины потребностей новых пунктов назначения определяются на основании данных о процентном соотношении заменяемых моделей автомобилей.

##### Задача №7

В цехе некоторого завода стоит пять станков, а количество рабочих в цехе равно четырем. Рабочий 1 не может работать на станке 3, а рабочий 3 – на станке 4. В соответствии с квалификацией рабочих начальник цеха в баллах оценил эффективность работы каждого из рабочих на каждом из станков (в 10-бальной шкале) (см. табл. 9). Постройте модель, позволяющую выполнять работы на станках наилучшим образом.

Таблица 9

Бальные оценки эффективности работы рабочих на станках

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | Станок | | | | |
| *1* | *2* | *3* | *4* | *5* |
| Рабочий | *1* | 5 | 5 | – | 2 | 2 |
| *2* | 7 | 4 | 2 | 3 | 1 |
| *3* | 9 | 3 | 5 | – | 2 |
| *4* | 7 | 2 | 6 | 7 | 8 |

***Задача №8\* (модель производства с запасами)***

Некоторая фабрика производит рюкзаки для путешественников. Спрос на эту продукцию есть только в марте–июне и составляет помесячно 100, 200, 180 и 300 шт. Объем производства рюкзаков меняется от месяца к месяцу в зависимости от выпуска других изделий. В течение рассматриваемых четырех месяцев фабрика может выпустить 50, 180, 280 и 270 рюкзаков соответственно. В каждый месяц спрос можно удовлетворить за счет

1) производства рюкзаков в течение текущего месяца;

2) избытка рюкзаков, произведенных в прошлом месяце;

3) избытка рюкзаков, произведенных в следующем месяце в счет невыполненных заказов.

В первом случае стоимость одного рюкзака составляет 700 руб. Во втором случае возникают дополнительные расходы в расчете 10 руб. на один рюкзак за хранение в течение месяца. В третьем случае за просроченные заказы начисляются штрафы в размере 40 руб. на один рюкзак за каждый просроченный месяц.

Постройте транспортную модель, позволяющую фабрике разработать оптимальный план производства на эти четыре месяца.

***Рекомендация.***Чтобы производственную задачу сформулировать как транспортную, необходимо установить соответствие между элементами этих задач (табл. 10).

Таблица 10

Соответствие между элементами задачи №8

|  |  |
| --- | --- |
| Транспортная система | Производственная система |
| 1. Пункт отправления i | 1. Период производства i |
| 2. Пункт назначения j | 2. Период потребления j |
| 3. Предложение в пункте отправления i | 3. Объем производства за период i |
| 4. Спрос в пункте назначения j | 4. Реализация за период j |
| 5. Стоимость перевозки из i в j | 5. Стоимость единицы продукции (производство + хранение + штрафы за период от i до j) |